3°/

• Etude de la monotonie de (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} - U_n = \frac{U_nV_n - U_n^2}{U_n+V_n} = \frac{U_n(V_n - U_n)}{U_n+V_n}$$

On a : $0 < U_n < V_n$ d'où : $U_{n+1} - U_n > 0$

Conclusion : (U_n) est une suite croissante

• Etude de le monotonie de (V_n)

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n+V_n}{2} - V_n = \frac{U_n - V_n}{2} < 0$$

D'où : (V_n) est une suite décroissante

On a : $\begin{cases} * \ (U_n) \text{ est une suite croissante} \\ * \ (V_n) \text{ est une suite décroissante} \\ * \ \lim\limits_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0 \end{cases}$

Alors (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes

4°/ a)* $U_0V_0 = 1\times 2 = 2$

* Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_nV_n = 2$

et montrons que : $U_{n+1}V_{n+1} = 2$

$$U_{n+1}V_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} \cdot \frac{U_n+V_n}{2} = U_nV_n = 2$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_nV_n = 2$

b) (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes alors

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = \ell \in \mathbb{R}$$

Or $U_nV_n = 2$ d'où : $\ell^2 = 2$

Et par suite : $\ell = \sqrt{2}$ ou $\ell = -\sqrt{2}$ Or $U_n > 2$ d'où $\ell \geq 0$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \sqrt{2}$

Solution 18 :

I-

$$1°/ f(x) - x = \frac{x}{x^2+x+1} - x = \frac{x - x(x^2+x+1)}{x^2+x+1}$$